Entretien avec David Aubin - Histoire des mathématiques

On a déjà parlé de votre parcours personnel et de votre formation en historien des sciences…

Oui, historien des sciences mathématiques.

Ainsi qu'est-ce que l'approche historique amène dans votre travail ?

Et bien, l'approche historique c'est mon métier. Ce qui m'intéresse c'est de faire de l'histoire des mathématiques, de comprendre le développement des idées mais pas que, le rôle social des mathématiques dans l'histoire à différentes époques, les interactions entre mathématiques et les autres sciences : le fondement de mon métier c'est de donc faire de l'histoire des mathématiques, ce n'est pas accessoire. Ainsi, je fais de la recherche en histoire des mathématiques ce qui veut dire que j'essaie de faire avancer les connaissances qu'on a sur l'histoire des mathématiques.

Et du coup, vous avez beaucoup de rapports avec les mathématiciens ?

Oui, on est dans une situation un peu particulière en tant qu'historien des mathématiques, puisqu'on est assez nombreux, y compris moi-même, à travailler dans des institutions qui sont d'abord et avant tout liées aux mathématiques, destinées à faire des mathématiques. Nous sommes ici par exemple à l'Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive-gauche pour utiliser le nom complet et qui est un institut de mathématiques dans lequel on fait de la recherche en mathématiques, qu'on appelle les mathématiques pures et nous sommes un certain nombre à faire de l'histoire des mathématiques dans ce cadre-là. Donc, c'est dans la reconnaissance d'une relation sur le long terme entre mathématiciens et historiens, des mathématiciens qui s'intéressent à l'histoire et des historiens qui s'intéressent aux mathématiques qui ont interagi de manière intense, forte à différents moments avec l'idée, je pense, de la part des mathématiciens que la réflexion sur l'histoire des mathématiques n'est pas étrangère à la pratique des mathématiques, peut-être pas pour tout le monde mais en tout cas pour certains d'entre eux.

En restant dans l'histoire des maths, l'histoire du 4CT, comment pensez-vous qu'il est perçu dans le cercle des historiens des sciences, est-ce que c'est vu comme une histoire close ou est-ce qu'il y a encore des débats à ce sujet-là ?

Ah, aucune histoire n'est close pour les historiens ! On arrive toujours à retourner sur le passé, à découvrir de nouvelles significations à ce qui s'est passé, donc on ne peut jamais dire qu'une histoire est close. Dans le cas du théorème des 4 couleurs, ce qu'il faut dire c'est que d'un point de vue historique c'est quelque chose qui a une assez longue durée puisque finalement ce n'est pas parce qu'on a eu des preuves récentes que ce théorème est apparu à ce moment-là donc **il y eu une longue durée de l'histoire des 4 couleurs**, cela se place dans un cadre qui est sans doute le cadre de la topologie, mais peut-être que ça existait auparavant avec des questions qui se posaient dans le cadre de la cartographie entres autres, et ces questions-là sont des questions, **c'est un petit problème assez intéressant, assez ludique, je dirais, qui s'exprime de façon claire, facile et qui a sans doute eu un écho au-delà des simples mathématiciens** même si cela impliquait des aspects de topologie, de mathématiques assez avancés, et non triviaux. Je pense qu'on est un peu dans le même cas avec d'autres théorèmes qui existent, comme le théorème de Fermat ou la conjecture de Goldbach. **Ce sont des théorèmes qui sont facilement exprimables qui ont donné lieu à des petits "jeux" mathématiques mais dont la preuve est très difficile à faire, voire parfois impossible**.

Est-ce que vous pensez que l'approche de la preuve du 4CT, le fait qu'elle soit informatique, est nouveau dans l'histoire ou est-ce qu'il y a eu des controverses par rapport à des preuves similaires ?

A mon sens, il n'y a pas une énorme controverse sur la preuve du 4CT, ce qui pourrait paraître surprenant. Encore une fois, il faudrait faire une histoire plus détaillée, plus fine pour essayer de connaître les choses. Peut-être que vous savez mieux que moi maintenant. Mais je ne pense pas que cela ait donné lieu à une controverse très vive au sein des mathématiques. **Le 4CT, par cette preuve informatique, s'inscrit dans un processus d'assez long terme qui est une réflexion sur le statut de la preuve en mathématiques. Et ce statut de la preuve varie, dépendamment des époques. Tout au long du XXe siècle, on peut dire que finalement, les critères de validité d'une preuve mathématiques, pour qu'elle soit acceptée de la communauté, se sont un petit peu relâchés par rapport à ce qu'on espérait pouvoir atteindre à la fin du XIXème siècle, ou même au début du XXème siècle**. Et il y a plusieurs éléments qui peuvent peut-être se rattacher à la même problématique. Je pense qu'un autre exemple qui est contemporain du 4CT, et qui est assez intéressant, c'est le théorème de classification des groupes finis. Il existe en mathématiques cette notion de groupes, et l'idée que les groupes finis sont tous plus ou moins des groupes qui sont identifiables, par exemple le groupe des permutations, des choses comme ça. Quand on a un ordre fini dans un groupe, c'est assez simple. Donc il y a un certain nombre de groupes qui sont assez bien connus, des groupes normaux, classiques, traditionnels. Mais il existe aussi dans les groupes finis, pour un certain nombre d'ordres particuliers, des groupes qui ont des caractéristiques singulières, et qui n'existent que pour un ordre précis, pour un nombre d'éléments précis. Et ces groupes-là ont été appelés des groupes simples, je crois, et on a longtemps cherché à trouver la liste de tous les groupes finis possibles, et on s'est aperçus finalement qu'il y en avait un nombre fini, on pouvait tous les trouver mais certains d'entre eux avaient des ordres, des nombres d'éléments très importants, de l'ordre de plusieurs milliers, mais c'étaient des groupes qui existaient. Et en fait, cette preuve-là, elle a été faite aussi entre les années 1960-1980, et c'est une preuve qui est très grande, c'est-à-dire que s'il fallait l'écrire, il y aurait sans doute des dizaines de milliers de pages, pour montrer que les groupes finis sont ceux-là, qu'il n'y en a pas d'autres. Et si vous voulez dire qu'elle n'a pas été écrite, elle n'a effectivement pas été écrite, non ! Cela parce que c'est trop long, il y a trop d'éléments, et d'une certaine manière, la preuve, personne ne l'a dans sa tête. **Il faut faire confiance à une communauté de chercheurs, qui comporte plusieurs centaines de chercheurs, qui ont chacun écrit une partie, qui ont chacun vérifié les parties des uns des autres, et donc ça passait tous les filtres de la revue par les pairs.** Mais comme la preuve est très vaste, c'est assez difficile de l'avoir entièrement dans sa tête, et donc **je ne pense pas qu'il y ait un chercheur qui puisse dire qu'il a fait la preuve du théorème des**

groupes finis tout seul dans sa tête. Alors le théorème des 4 couleurs est un petit peu différent puisque finalement, ce n'est pas la communauté qui le prouve, mais un ordinateur, qui passe en revue tous les cas possibles. Evidemment l'ordinateur est programmé, en principe le programme a été vérifié. Je ne sais pas si ce programme a été prouvé, auquel cas on aurait pratiquement toutes les certifications pour établir un théorème. Mais comme je disais, cela s'inscrit dans le temps long. Pourquoi les mathématiciens ne sont pas plus troublés que cela par ces exemples-là, par la classification des groupes finis ou le 4CT ? C'est parce que tout simplement, **la notion de preuves en mathématiques avait déjà évolué de telle sorte que ces types de preuves là puisse être acceptées sans trop de problèmes par la communauté**. Et pourquoi est-ce que ce type de preuve a pu être accepté sans problème par la communauté **? C'est qu'on a eu un rêve à la fin du XIXème-début du XXème siècles qui était de formaliser complètement les mathématiques, de faire en sorte que les mathématiques puissent être constructibles à partir de rien, à partir de la logique essentiellement. Et puis ce rêve-là, il a explosé. On n'a pas pu le poursuivre, l'amener à son terme pour des raisons mathématiques, c'est ce qu'on appelle les théorèmes de Gödel, qui ont été prouvés dans les années 1930, et qui démontrent qu'on ne peut pas avoir une théorie complète et cohérente des mathématiques**. Du coup, pour faire des mathématiques, il fallait se dire que ce qui est important dans une preuve mathématique, ce n'est pas nécessairement qu'elle soit absolument certaine, mais bien **qu'elle soit acceptée par une communauté**, comme étant intéressante, qu'elle porte des résultats significatifs qui permettent de faire d'autres avancés mathématiques. Donc, **la certitude absolue de la preuve en mathématiques, à mon sens, la communauté en a fait son deuil depuis quand même assez longtemps**. Et c'est pour cela que ce genre de preuve a été accepté sur le même type de critère pragmatique.

Les mathématiques sont en fait en train de devenir comme les sciences expérimentales ?

Je n'irai pas jusque-là, parce que je pense que les mathématiques ne sont pas uniquement basées sur l'expérience. Faire une distinction nette entre les deux est plus compliqué, mais déjà **ce qui est assez intéressant c'est que le statut de l'expérience dans les mathématiques évolue**. On passe à quelque chose d'autre, c'est-à-dire que **l'ordinateur permet de faire des expériences en mathématiques, il permet de tester les hypothèses, de faire des simulations qu'on ne pouvait pas faire auparavant**. Mais l'expérience mathématiques n'est pratiquement jamais considérée comme étant une démonstration mathématique. C'est intéressant cet aspect-là parce qu'en fait la question de la démonstration, quand on prend encore une fois l'histoire sur le long terme, la démonstration comme mode de faire de la science, c'est d'abord mathématique. C'est en mathématiques qu'on fait des démonstrations, pas dans les autres sciences. Et à la période de la révolution scientifique, des scientifiques de sciences naturelles, comme par exemple William Harvey, qui travaillait sur la description de la circulation du sang, c'est lui qui prouve que le sang circule dans le corps, il utilise justement le terme de **'démonstration'**. Il dit : "voilà on va faire des démonstrations oculaires" ; donc il transforme le statut de l'expérience qui était subordonnée en un statut de démonstratif, c'est-à-dire qu'on peut faire des démonstrations à l'aide de l'expérience. Les mathématiques ne vont pas jusque-là. Il y a les mathématiques "expérimentales", si on peut dire, qui sont intéressantes aujourd'hui, elles sont utilisées par un certain nombre de chercheurs, mais **aucun théorème ne peut être basé sur l'expérience**.

On a vu que beaucoup de critiques sur le théorème des 4 couleurs se basaient sur le fait que la preuve n'était pas recevable, parce qu'elle était fondée sur une expérience et que du coup cela ne correspondait pas aux critères habituels d'une preuve.

Tout à fait, en ce sens-là, il s'agit d'une expérience, puisque c'est quelque chose que l'on fait une fois, où l'on essaie de voir un résultat. Mais ce qui est un peu différent, je pense, d'une expérience c'est de poser une question, d'une certaine manière, dans le champ du réel, et d'en avoir une réponse, et la réponse est interprétée comme étant valable. Dans ce cadre-là, ce n'est pas tout à fait la même chose : **quand je parle d'expérience en mathématiques, je parle d'autre chose, je ne parle pas d'une preuve**. C'est-à-dire que la preuve ici, elle est simplement découpée en morceaux, et c'est l'ordinateur qui fait un certain nombre de vérifications. Mais **il ne s'agit pas d'une expérience comme telle**, on ne fait pas, par exemple, une simulation des équations de Navier-Stokes, dans le cadre d'un fluide. Ce n'est pas tout à fait la même chose, je peux comprendre effectivement pourquoi un certain nombre de personnes qui adhèrent à une vision formelle, formaliste des mathématiques vont dire que c'est une expérience, vu que cela est basé sur une seule fois où l'ordinateur fait tout ça. Mais bon, en général, on pourrait répéter cette preuve-là, et du coup ce serait comme une espèce de vérification, de réplication de l'expérience. Ça s'est fait avec des programmes différents, c'est donc une expérience différente où on obtient les mêmes résultats. A ce moment-là, on peut encore une fois parler d'expérience. Mais quand on va plus loin et qu'on dit que le programme est prouvé, dans la mesure où c'est le cas ou pas, je l'ignore, on serait dans un autre domaine.

Est-ce que vous pensez qu'aujourd'hui, il peut y avoir encore des preuves complètement formelles ?

Ah oui bien sûr.

Complètement écrites, qu'un chercheur puisse vérifier ?

C'est compliqué. Quand je parlais de formalisme en mathématiques, c'est dans un sens précis. Au début du XXème siècle, un certain nombre de chercheurs, de mathématiciens ont voulu fonder les mathématiques dans la certitude. Il y avait un certain nombre d'écoles, le formalisme c'est l'école de David Hilbert, le logicisme avec Russell et Whitehead par exemple, ce sont des personnes qui essayaient de construire les mathématiques sur la base d'un formalisme, sur la base de la logique, à l'école de Bourbaki ensuite, on a essayé de construire les mathématiques sur la base de la notion de structure. Aujourd'hui on utilise plutôt la notion de catégorie comme étant des fondements des mathématiques. Mais dans tous les cas il s'agit de manières de décrire le plus précisément possible. Il y a des différences entre ce que je viens de nommer, mais de décrire le plus explicitement possible toutes les opérations d'une preuve. Donc ça portait lieu à un certain nombre de critiques au début du XXème siècle, même de ridicules en disant que ça prenait 200 pages dans un livre de Russell et Whitehead pour prouver qu'un plus un est égal à deux. Et donc effectivement, s'il fallait écrire dans ce langage-là toutes les preuves mathématiques, ce serait impossible de le faire. Ceci dit, les critères de la rigueur en mathématiques actuels sont quand même assez élevés, et il y a beaucoup de preuves en mathématiques qui sont faites non pas par des critères de formalisme comme ceux-là, mais des critères du type de ceux qu'utilisent Bourbaki dans ses traités, qui sont quand même des critères de rigueur assez élevés. **Il faut faire la part des choses entre "est-ce que c'est possible de faire une preuve complètement formelle ?", cela dans la plupart des cas on ne le fait pas parce que c'est trop long et ça n'apporte aucun intérêt supplémentaire au développement**. On a l'impression, c'est ce que Bourbaki exprime souvent et écrit déjà dans les années 1930, que ça n'apporte rien de plus ; on pourrait le faire si on voulait, mais ça n'apporte rien de plus. Et donc ce genre de preuves-là, elles sont faites tous les jours par mes collègues dans ce bâtiment, et c'est leur manière de travailler la plus courante. Donc encore aujourd'hui d'un point de vue sociologique, si on regarde les mathématiques, elles sont faites beaucoup moins collectivement que les autres sciences. En effet, en regardant le nombre d'auteurs de papiers, la moyenne est beaucoup plus basse que dans les autres sciences : les gens travaillent de manière beaucoup plus individuelle en mathématiques aujourd'hui que dans les autres sciences, où le collectif est la norme. Ce qui ne veut pas dire qu'il n'y a pas de pratiques collectives de plus en plus importantes en mathématiques, ce qui est le cas aussi, mais on est dans des ordres de grandeur très différents. Quand on pense qu'au CERN il y a 1000 personnes qui vont publier et signer un article, en mathématiques c'est très rare qu'il y en ait plus de 2 ou 3.

Et est-ce que vous pensez qu'il y a des critères d'élégance dans une preuve mathématique, qui pourraient faire défaut à la preuve informatique ?

Oui, je suis convaincu de ça aussi. **Ce n'est pas toujours évident de percevoir ce que c'est que l'élégance en mathématiques aux profanes. Mais je pense qu'effectivement la méthode brutale qui consiste à vérifier tous les cas un après l'autre est une méthode qui ne plaît pas beaucoup aux mathématiciens la plupart du temps. Ils cherchent des méthodes qui sont plus générales, qui permettent par un même raisonnement de résoudre un ensemble de cas très grand, plutôt que d'essayer de tester**. C'est ce qui est la méthode de la preuve du 4CT, c'est-à-dire qu'on teste un très grand nombre de cas possibles avec la force brute. Donc effectivement, la preuve comme telle, d'après ce que j'en connais, n'est pas une preuve qui peut paraître élégante de ce point de vue-là. Mais il y a un certain nombre de théorèmes mathématiques qui sont prouvés par cette méthode-là, où on examine un grand nombre de cas différents puis on fait pour chacun des cas une démonstration. Parfois on arrive, pour certains mathématiciens, à **réunir tous ces cas dans un même processus, et pour un mathématicien, ça paraîtra plus élégant**.

Est-ce que vous pensez que le fait qu'on ait étendu le statut, la définition de la preuve soit lié au fait qu'on se soit retrouvé face à une limite de la preuve formalisable, élégante ?

Non, je n'en suis pas convaincu. Je dirais d'abord que l'ordinateur a donné naissance à un grand nombre de phénomènes dont on n'avait pas forcément conscience, et qui ont donné lieu à des mathématiques très formelles de ce point du vue-là. On peut regarder par exemple la théorie des systèmes dynamiques et du chaos, les fractales, tous ces aspects-là qui ont d'abord été explorés par les machines avant d'être formalisés d'un point de vue mathématique, qui montrent bien que finalement ce n'est pas simplement le fait qu'on utilise des ordinateurs qui empêche de faire des mathématiques. L'ordinateur peut, au contraire, par sa capacité de calcul très grande, arriver à donner des résultats très élégants en mathématiques ; et je pense que ce n'est pas terminé. **Ce qu'offrent l'ordinateur et sa capacité de calcul actuellement, c'est la possibilité de faire des opérations qui auparavant paraissaient impossible à faire à la main**, même en divisant le travail à plusieurs comme on faisait, et donc d'offrir une résolution à des problèmes qui sont effectivement des résolutions qu'on pourrait appeler de force brute, et qui n'ont pas l'élégance, peut-être, d'anciens modes de résolution. Et ça, effectivement, à partir du moment où l'objectif est plus l'efficacité, que la production de connaissances sur le monde ou même de théories globales, ça peut paraître plus utile d'un point de vue pragmatique. Si on cherche à comprendre comment se déplace un projectile dans l'air, est-ce qu'on a besoin de faire énormément de mécanique de fluide, de connaître l'équation Navier-Stokes ? Ou est-ce que simplement on met tout ça dans la machine, la machine nous fait une simulation qui nous donne un résultat aussi précis que l'on veut ? Et donc on n'a plus besoin de la science mécanique sous-jacente, la mécanique des fluides sous-jacente, pour arriver au résultat désiré. Et donc on n'a plus besoin de la compréhension scientifique fine du phénomène en question. Cela se produit aujourd'hui dans le domaine des sciences humaines, très fortement, c'est beaucoup moins cher qu'auparavant de faire des travaux sur des données importantes, et donc de donner un résultat sans nécessairement passer par une étape de théorisation derrière tout ça et de compréhension plus fine, finalement plus élégante des processus. Je pense qu'aujourd'hui on est dans une époque où le **rapport entre le numérique et le théorique est remis en question, tout simplement parce que le numérique coûte beaucoup moins cher et est beaucoup plus puissant qu'auparavant**, ce qui ne veut pas dire que l'un et l'autre sont arrivés au bout de ce qu'ils peuvent faire.

On avait également vu dans le 4CT qu'il était mis de côté parce qu'il ne constituait pas une preuve a priori. Est-ce que vous pensez que le critère d'une preuve qui doit être a priori est toujours valable ?

Je pense que pour évaluer tout cela, il serait intéressant d'avoir une approche sociologique, c'est-à-dire qu'il serait assez pertinent d'évaluer la controverse, de connaître ceux qui sont pour et ceux qui sont contre, d'où ils viennent et à quelle branche de mathématiques ils appartiennent. Donc l'idée d'avoir une preuve *a priori*, je pense que cela va dépendre un peu de ce qui est entendu par là. Je pense que ce n'est pas nécessairement très clair comme formulation. J'aurai besoin d'un peu plus de détails pour pouvoir comprendre qu'est-ce qu'ils veulent dire par preuve *a priori*.

Ils parlaient de preuves a priori dans le sens où il n'y avait pas nécessairement besoin de l'expérience, peut-être dans le sens où on considère pas que c'est vrai, on ne prend pas quelque chose qui est vrai et ensuite on vérifie, plutôt une preuve où on part de l'hypothèse et ensuite on arrive à ce qu'on veut démontrer.

Non, mais dans un certain sens on a la dualité des preuves mathématiques depuis très longtemps, déjà chez Euclide au IIIème siècle av JC. Euclide décrit deux modes de preuves : la synthèse et l'analyse, et on n'est quand même pas très loin de ces aspects-là je pense, si c'est ça vraiment qui est entendu par la preuve *a priori*. Le théorème est quand même un théorème classique de mathématiques et qui demande, pour être prouvé, d'après ce que j'en connaît, à vérifier un grand nombre de cas. Disons que la structure logique de la preuve ne paraît pas poser problème, ce qui pose problème c'est le fait qu'elle soit faite par une machine, que les opérations soient faites par une machine, c'est ça qui pose problème. En même temps, on envoie des sondes sur Mars, ou même quand on conduit une voiture, c'est ce qu'on fait, c'est-à-dire que la voiture elle est pas prouvée mais la trajectoire de la voiture, elle est déterminée par l'ordinateur qui résout un grand nombre de petits problèmes qui ont été programmés pour être résolus.

Justement, ce qui est intéressant, c'est que vous dites bien que les mathématiques ont ce caractère assez particulier, différent des sciences expérimentales. Les sciences expérimentales ont peut-être plus l'habitude d'utiliser l'instrumentation, alors que les mathématiques avaient moins cette habitude-là, et c'est peut-être un des enjeux les plus importants dans cette controverse ?

Je pense qu'on est peut-être dans un processus qui est similaire aux sciences humaines et sociales qui ont aussi un petit peu des difficultés avec la numérisation, le numérisme, tout transformer en nombre, le big data, qui se fait parfois au détriment de la théorie. La théorie était assez simple dans le domaine des sciences physiques, et puis elle a bien résisté à la numérisation quoique parfois les problèmes les plus complexes, on les résout aujourd'hui par le numérique. C'est pareil dans les sciences humaines et sociales, et on se pose parfois la question de la valeur même, de la nécessité de la théorie. En mathématiques, je ne pense pas qu'on en soit rendu là, c'est-à-dire qu'il y a très peu de cas qui existent aujourd'hui en mathématiques, de démonstrations qui puissent se passer complètement de l'aspect théorique, c'est-à-dire s'il s'agit de démontrer n'importe quelle propriété sur les nombres, ce ne sera pas en faisant des expériences qu'on pourra la démontrer, puisqu'en général il faut la démontrer pour un nombre fini. Même si on l'a démontré jusqu'à 14 milliards ou $14*10^{100}$, des chiffres qui sont impossibles à vérifier expérimentalement sur un ordinateur, qui nous dit que l'étape suivant ne va pas produire un contre-exemple ? Par exemple, le théorème de Fermat qui est de ce type-là : $a_n+b_n = c_n$ avec a, b, c $\in N$, et n $\in N$ tel que n>2, n'a pas de solution. Ça on peut le démontrer par ordinateur pour n=2, n=3, n=4 ..., pour n'importe quel n, et du coup on a besoin de la théorie pour être capable de prouver le théorème, par ordinateur. Donc effectivement, on peut trouver une formule qui donne les 100 000 premiers nombres premiers, ce n'est pas compliqué, on peut la fabriquer avec un ordinateur. Est-ce que cette formule-là va nous donner le 100 001ᵉ, ce n'est pas sûr, on peut le tester, si ça marche tant mieux, on est content. Après on teste le 100 002ᵉ, le 100 003ᵉ mais puisqu'on n'a aucune formule mathématique qui est capable de nous donner tous les nombres premiers actuellement, et on ne pourra pas savoir si elle est valable ou pas. Et même si elle nous donne les 100 000 premiers puis par la machine on est capable de prouver qu'elle nous donne 100 milliards ou 1000 milliards, on n'aura pas la preuve mathématique que la formule soit exacte. Elle peut être utile mais ce ne sera pas un résultat mathématique, c'est en ce sens-là que je trouve que ça c'est une véritable expérience en mathématique et l'expérience ne peut pas montrer un théorème. Mais si on est capable de mécaniser la preuve, là on peut faire une expérience qui permet de donner une plus grande confiance dans la preuve. C'est ça la différence entre les deux types d'expériences dont on a parlées jusqu'à présent, si je m'exprime clairement.

Vous aviez dit qu'un des aspects importants pour qu'une preuve soit reconnue ce soit

qu'il y ait une espèce de consensus parmi les scientifiques, mais la preuve qui a été apportée pour le 4CT est difficilement vérifiable. Du coup, est-ce que le fait que les mathématiciens ne puissent pas l'aborder facilement, et que ce soit plus difficile à ce qu'il y ait un consensus parce qu'ils ne peuvent pas en avoir une complète compréhension…

Tout à fait, effectivement, encore une fois c'est pour cela que ce serait intéressant d'avoir une bonne sociologie des mathématiciens impliqués dans la question, savoir un petit peu où est-ce qu'ils travaillent, dans quel domaine, où est-ce qu'ils publient de manière privilégiée… Parce que la manière dont s'établit le consensus autour de cette preuve peut être très intéressante à étudier, encore une fois, comment est-ce qu'on en parle dans les médias ou dans les revues de la communauté de mathématiciens ? Du coup cette preuve-là, quel est son statut en mathématiques, il est effectivement. J'ai dit que je ne pensais pas que c'était très problématique, très controversé d'un point de vue général, je pense qu'il y a peut-être certaines personnes qui vont être choquées par tout cela. **Mais ce serait peut-être intéressant d'étudier la manière dont le consensus s'est fait dans la communauté mathématique, et puis quels sont les points de dissensus**, je pense que là ce serait vraiment, encore une fois, un travail sociologique de regarder les gens qui sont en résistance par rapport à ça. De la même manière, je pense que ce ne serait pas très différent, si on veut, d'autres domaines, c'est-à-dire comment est-ce que finalement dans le cadre de la mécanique quantique, certaines personnes acceptent la mécanique quantique et il y a toujours eu des petites poches de résistance de personnes qui cherchaient des théories alternatives à la mécanique quantique parce qu'ils ne sont pas satisfaits de cette approche probabiliste. Ça reste encore une fois des personnes un peu marginales qui essaient de développer des interprétations plus déterministes de la mécanique quantique. Donc la manière dont le consensus s'établit en mécanique quantique est peut-être similaire, peut-être pas non plus parce qu'il y a quand même des différences évidentes du fait que la mécanique quantique c'est utile, le 4CT ce n'est pas non plus quelque chose qui est le fondement des sciences mathématiques. Ce serait intéressant de savoir par exemple s'il y a une branche complète des mathématiques qui se construit sur un théorème du type des 4 couleurs, ça pourrait être un cas intéressant à étudier. A ma connaissance, ce n'est pas le cas, il n'y a pas de branche des mathématiques qui se construit sur des fondements qui seraient établis par une preuve informatique, je ne sois pas si c'est le cas dans d'autres domaines. Pour le moment, il y en a peu des théorèmes comme ça qui sont prouvés par ordinateur, et aucuns de ceux-là n'ont vraiment donné lieu au développement d'un vaste domaine des mathématiques. Au contraire les moments où il y a eu des vastes domaines des mathématiques qui se sont développés à cause de l'ordinateur, cela a été en général justement parce qu'on a pu faire des preuves formelles d'un certain nombre de phénomènes qui étaient montrés, exhibés par ordinateur.

Est-ce que vous pensez qu'il y a eu un déclic ? Vous disiez qu'au début du XXème siècle, on cherchait des preuves formelles. Est-ce qu'il y eu un déclic qui a fait qu'on accepte une conception plus élargie des preuves ?

Un déclic ? J'ai pointé **les théorèmes d'incomplétude de Gödel, je pense que ça, ça a été très important dans l'histoire des sciences mathématiques. Ça a souvent été considéré comme étant un peu la fin de la certitude**, le fait que les mathématiques étaient un "château construit sur des fondations de sable", ce sont les images que l'on emploie parfois. Cela a été très important, et je pense que la relation avec l'informatique est très importante aussi mais, à mon sens, beaucoup plus complexe que ce que l'on dit d'habitude. Ce n'est pas simplement que ça fait bouger la frontière entre théorie et numérique, entre l'aspect formel et l'aspect computationnel, c'est la ligne de faille est en flux dans tous les domaines, pas uniquement dans les mathématiques, et que ce mouvement-là soit intéressant à étudier en soi, mais c'est encore une fois, d'un point de vue plus sociologique que logique ou philosophique.

Vous parliez tout à l'heure du relâchement des critères de preuve, et est-ce que vous pensez que l'informatique en général peut procéder à rehausser les critères de preuve ou au contraire continuer dans ce processus de relâchement des critères de preuve ?

Il faut voir que les informaticiens sont souvent des mathématiciens qui ont de très haut niveau de critères de preuve. **Il faut savoir aussi qu'il existe tout un pan de l'informatique qui s'appelle l'informatique théorique, qui est un domaine très mathématisé, dont on pourrait pratiquement dire que c'est une branche des mathématiques, sauf que c'est fait par des informaticiens**, comme il y a des branches des mathématiques qui sont fait par des physiciens, par exemple en théorie des super corps, où là effectivement, les critères de preuve peuvent varier d'une communauté à l'autre. Je connais moins la communauté des informaticiens, que la communauté des physiciens par exemple, où je sais très bien que les physiciens qui travaillent en physique théorique peuvent parfois avoir la prétention de prouver des théorèmes mathématiques. Ils le font avec leurs propres critères de preuve qui sont parfois beaucoup plus larges justement que les mathématiciens, avec parfois le fait qu'il y aura un rattrapage, un recentrage, ça peut arriver aussi du fait que les mathématiciens arrivent à prouver quelque chose que les physiciens utilisaient par ailleurs. Et dans le domaine de l'informatique je pense que l'on perçoit ce genre de choses-là. Ça c'est l'aspect informatique théorique, et effectivement il y a tout le reste qui est de dire est-ce qu'on peut utiliser l'informatique pour démontrer des choses ? Et là ce ne sont pas nécessairement les mathématiques comme tels qui sont impactées, on a qu'à penser au statut problématique des modèles climatiques aujourd'hui : est-ce que la connaissance qui provient d'un modèle est d'une certaine manière moins établie que celle qui proviendrait d'une expérience ou de théories bien cadrées ? C'est la question qui est posée très souvent de savoir si le modèle informatique ne peut pas d'une certaine manière être moins fiable que la théorie, que l'expérience. Cela s'insère un peu entre les deux. Et cette question-là elle reste ouverte je pense, mais très très souvent les modèles informatiques sont ultimement basés sur les théories, sur les expériences et sur une communauté encore une fois qui accepte un certain nombre de critères de preuve et ils en sont en général assez bien convaincu. Et **c'est parfois en sortant justement de la communauté que les problèmes se produisent, c'est en passant d'une à l'autre**. Encore une fois, c'est pour ça que je dis que le 4CT moi j'irai dans une approche sociologique pour essayer de comprendre s'il y a des gens qui sont résistants à la fois à la façon dont est construit le consensus, parce que la plupart des mathématiciens qui acceptent cela en disant : "voilà ça a été prouvé", c'est intéressant de connaître le biais de média par lesquels cette conclusion-là se propage, et puis de connaître plus précisément qui sont ceux qui s'y opposent, et d'où est-ce qu'ils viennent.

Est-ce que vous connaissez le logiciel Coq qui a été utilisé notamment pour redémontrer le 4CT en 2004. Mr Gonthier avait procédé différemment par rapport à la preuve de 1976, dans le sens où ce n'était plus une disjonction de cas, mais vraiment un raisonnement fait par informatique. Donc Coq c'est un assistant de preuve qui permet de faire des raisonnements de manière informatique, il fonctionne notamment avec la théorie des types. Est-ce que vous pensez que l'utilisation de logiciels d'assistance de preuve, comme Coq, développé par l'Inria, peuvent être une manière de continuer à faire des mathématiques d'une manière logique, formelle mais de manière informatique également ?

C'est une question intéressante, sur laquelle je n'ai pas beaucoup de compétence pour répondre.

C'est juste pour vous demander votre avis personnel sur la question.

Effectivement la seule chose que je pourrais donner ce sont des impressions un peu personnelles fondées sur pas grand-chose. Je pense que d'un point de vue sociologique, il reste encore beaucoup de chemin à faire dans la communauté mathématicienne pour que ce type de pratiques deviennent courantes. **J'ai l'impression que la plupart des mathématiciens restent aujourd'hui très attachés à une façon humaine de faire la preuve, que s'ils utilisent les ordinateurs c'est très souvent pour faire des calculs**, de plus en plus souvent, et encore ce n'est pas nécessairement complètement répandu pour tout le monde, pour le calcul formel, c'est-à-dire résoudre des équations formellement avec l'ordinateur avec des logiciels de types Mathematica, Maple, etc, je pense que là c'est assez répandu maintenant. Mais finalement, quand on regarde la formation des étudiants, et les pratiques, **j'ai l'impression que ça reste encore très marginal**. Et donc changer ces types de choses-là, il faudrait vraiment qu'il y ait un effort important ou un résultat, des résultats absolument nouveaux, très intéressants par exemple, comme je disais, si on était capable de fonder une nouvelle branche des mathématiques qui ait énormément d'intérêt pour la communauté mathématique sur les résultats qui proviennent de ce genre de logiciels, peut-être que là effectivement cela pourrait conduire à un développement, à un changement des normes. **À mon sens, pour le moment, l'inertie des pratiques de la communauté est très forte, et puis effectivement le fardeau de la preuve est sur les épaules de ceux qui proposent des méthodes alternatives**. Est-ce que vraiment cela sert-il ? Ou est-ce que simplement cela sert-il à démontrer un petit théorème intéressant mais dont finalement on ne se sert pas beaucoup ?

Ce serait vraiment une histoire de mentalités ?

De mentalités, je n'aime pas beaucoup le mot. **Je dirais plutôt les normes d'une communauté, et les pratiques d'une communauté**. Et pour changer cela, en général, il faut qu'il y ait des motivations qui soient très fortes, puisque certaines manières de faire produisent des résultats, s'il faut changer la manière de faire, il faut le faire pour une raison qui est importante, soit parce qu'on y est incité de manière forte, par exemple par les pouvoirs publics, des choses comme ça, les agences de financement. Mais même là, je pense que c'est surtout si ça démontre l'efficacité dans un cadre précis que les gens adhèrent à de nouvelles façons de faire.

Peut-être que s'il y avait plus de preuves similaires au théorème des 4 couleurs ?

Surtout des preuves importantes, ce que je veux dire c'est qu'il y a des théorèmes qui sont plus importants que d'autres en mathématiques et en général un théorème qui est considéré comme plus important est un théorème qui mène à des possibilités de faire des recherches, à découvrir de nouvelles relations qui étaient inexplorées auparavant. Et ce serait le genre de choses qui seraient très utiles, pour démontrer l'éventuelle efficacité de toute preuve par logiciel. Je pense qu'il faut vraiment démontrer que ça peut apporter des choses nouvelles et importantes. Je ne connais pas le logiciel, et la prévalence de son utilisation. Peut-être que je peux me tromper aussi.

Juste une question par rapport aux mathématiciens : qu'est-ce qui fait un bon mathématicien aujourd'hui ?

C'est difficile à dire, comme toujours cela a été basé sur un certain nombre de critères très différents, difficile à prédire aussi. Je pense qu'en général pour être capable de bien connaître dans un domaine scientifique qui sont les gens qui réussissent à s'y insérer, d'une certaine manière les critères de Thomas Kuhn ne sont pas les plus inutiles, puisqu'il y a un grand nombre de petits puzzles qui sont résolus d'une manière systématique, toujours un peu les mêmes, par les étudiants qui doit permettre un peu l'acclimatation, l'acculturation dans un domaine et donc en général les bons scientifiques, ceux qui deviennent scientifiques sont ceux qui sont bons pour résoudre ces problèmes-là. Maintenant si on veut dire par 'bons scientifiques' ceux qui sont innovants en plus, là c'est plus compliqué ! Ceux qui sont innovants en plus, je ne connais pas vraiment d'explication convaincante d'où réside l'innovation dans le domaine des sciences, beaucoup ont essayé mais je ne pense pas qu'il y ait de consensus là-dessus.

Est-ce qu'il pourrait y avoir une personne avec une formation en informatique qui puisse apporter une preuve en mathématique qui puisse être acceptée par la communauté ?

Oui bien-sûr. Encore une fois je ne connais pas le domaine des informaticiens théoriques, ils sont très rigoureux, ils font des mathématiques de haut niveau, mais je pense qu'on peut faire le parallèle avec la physique, et là du coup on a l'exemple clé, typique d'une médaille Fields, le prix le plus élevé en mathématiques, qui a été donnée à Edward Witten il y a quelques années de cela. Edward Witten est un physicien en physique théorique, et la plupart de ses preuves sont des preuves qui sont pas hyper satisfaisantes d'un point de vue mathématique. Mais ses résultats sont assez intéressants et significatifs pour les mathématiciens, et ont fait l'objet d'études des mathématiciens, de preuves peut-être plus formelles parfois mais surtout de développements de grands nombres de domaines de recherche à l'interface entre physique et mathématiques. Et donc à mon sens il n'y a eu aucune controverse sur l'attribution de la médaille Fields à Edward Witten, au contraire la plupart des gens trouvaient que c'était une très bonne chose. Puis plus récemment des équations de Schrödinger, des choses comme ça, ont donné lieu aussi à des équations de Boltzmann, beaucoup de recherches en mathématiques, à la frontière entre mathématiques et physique. Je pense que ce que fait Cédric Villani n'est pas très loin de cela non plus, sur la notion d'entropie, donc des interactions entre mathématiques et physiques très fortes. Les dernières médailles Fields sont quand même des gens qui sont clairement des deux côtés mathématiques et pas du côté de la physique, mais ce que je veux dire c'est que cette interaction-là est très forte et puis il y a eu Edward Witten qui était plutôt physicien. Et donc **je pense qu'on pourrait avoir des cas comme ça en informatique, si quelqu'un prouvait le théorème P non P, qu'il soit informaticien ou mathématicien, il serait très bien accueilli**.

J'aurais une dernière question à vous poser : est-ce que vous pensez que la réticence de la communauté mathématique à l'égard des preuves informatisées, quelque part ce ne serait pas la tension, la ligne imaginaire qui existe entre l'humain et les machines ? Est-ce que cela est fondé sur cette tension-là ?

C'est intéressant. Il y a un cas que j'aime beaucoup, c'est dans les années 1960, en 1966-67 : un mathématicien qui s'appelle Steve Smale, un américain, et qui a des propos sur politique parce qu'il est contre la guerre du Viêt-Nam, et qui se dit qu'est-ce qu'un mathématicien peut faire qu'un ordinateur ne peut pas faire ? Il pose la question en 1960, alors que les ordinateurs sont très peu répandus, pas comme aujourd'hui, et je pense qu'à ce moment-là se posait la question clairement : est-ce que le mathématicien va être remplacé par l'ordinateur. Aujourd'hui on est 60 ans plus tard, **il reste encore beaucoup de mathématiciens, et je pense que la question de savoir est-ce que le mathématicien va être remplacé par l'ordinateur se pose toujours, mais elle ne se pose pas exactement dans les mêmes termes**. Je pense qu'aujourd'hui on sait très bien ce qu'un ordinateur peut faire, on a une bien meilleure connaissance, une bien meilleure idée du périmètre de ce que les ordinateurs et les moyens de calcul qu'on a peuvent accomplir, et il reste toujours, je pense, encore une fois, un **besoin de théorisation qui n'est que très imparfaitement ou partiellement couvert par l'ordinateur. Et donc de ce point de vue-là, l'être humain, le mathématicien, le théoricien reste utile. La seule chose c'est qu'effectivement le rapport de coût a été modifié de manière importante, c'est-à-dire qu'auparavant faire du calcul par exemple coûtait excessivement cher**, et donc même s'il fallait employer des femmes noires, comme dans le film, cela coûte cher malgré tout parce qu'on en emploie beaucoup, ça prend du temps et si on veut avoir le même niveau c'est compliqué. **Le fait maintenant que ce coût-là est diminué fait en sorte que les relations entre théorie et calcul sont changées, modifiées. Le coût de la théorie n'a pas changé**, auparavant la théorie coûtait beaucoup moins cher que le calcul, donc on faisait beaucoup de théorie, et on essayait de limiter le plus possible les moments où il fallait qu'on fasse du calcul. Il y a des moments où on faisait les calculs : quand il s'agit de faire une bombe atomique, on fait les calculs. Mais aujourd'hui le coût marginal du calcul a baissé énormément. Ainsi la relation entre théorie et calcul est modifiée mais je pense qu'on ne peut pas penser qu'on va s'en débarrasser complètement. A mon sens, j'en suis assez convaincu, **tout ce qui est avancé comme argument en faveur de l'informatisation de beaucoup de domaines est à la base un argument économique**, beaucoup plus qu'un argument philosophique, méthodologique, sociologique, et c'est très loin d'un argument épistémologique en tout cas. Donc je pense qu'il faut le voir comme ça, et à partir du moment où on a vu ça comme ça on peut se rendre compte justement si auparavant on se disait dans quel cas est-ce que ça vaut la peine que l'on fasse du calcul. À présent, on peut renverser la question et se demander dans quel cas est-ce que ça vaut la peine qu'on accompagne nos calculs d'une théorisation plus poussée ? C'est la société qui va prendre cette décision-là en disant que pour un grand nombre de choses, on peut peut-être se passer de la théorie, et pour un certain nombre de points précis, on va décider qu'on investit massivement là-dedans, et dans quoi on investira ? Dans les moyens humains, en général qui ont toujours été plus chers, il serait intéressant de voir si cette question se pose de plus en plus explicitement dans les débats sur la connaissance.